Úvahy o theorii kvadratických zbytků pro kmenné moduly

s novými vztahy k theorii kvadratických forem s kmennými zápornými determinanty.

I.

Jmenujž nám q kladné kmenné číslo tvaru $4a+3$, a pišme ε_ν na místě obvyklého Legendreova symbolu

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{\nu}{q}\right) = \left(\frac{-q}{\nu}\right) \quad , (\nu = 1, 2, \ldots q-1) ,$$

při čemž obvyklým způsobem sklade definice

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_q = 0 .$$

Utvořme

$$(1) \quad Q(x) = \sum_{\nu=1}^{q-1} \varepsilon_\nu x^\nu$$

které algebraické shodě

$$Q^2(x) + q \equiv 0 \quad \text{mod.} \ \frac{x^q-1}{x-1} .$$

Tu chceme prohloubiti úvahami pomocí levé strany k modulu.

ARMIN WEINER

Úvahy o theorii kvadratických zbytků pro kmenné moduly

jakož i s novými vztahy k theorii kvadratických forem s kmennými zápornými determinanty.

I.

Znamenej nám q kladné kmenné číslo tvaru $4a+3$, a píšme ε_ν na místě ~~obvyklého~~ Legendreova symbolu

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{\nu}{q}\right) = \left(\frac{-q}{\nu}\right) \quad , (\nu = 1, 2, \dots q-1) ,$$

při čemž obvyklým způsobem se klade ~~bude též vždy užito definice~~

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_q = 0 .$$

Polynom

$$(1) \quad Q(x) = \sum_{\nu=1}^{q-1} \varepsilon_\nu x^\nu$$

hoví algebraické shodě

$$Q^2(x) + q \equiv 0 \quad \text{mod.} \ \frac{x^q - 1}{x-1} .$$

Tu chceme prohloubiti určením ~~podílu~~ poměru levé strany ~~při jejím dělení~~ k modulu.

DSI

Abychom čtverec funkce $Q(x)$ vyjádřili, definujme ~~veličiny~~ čísla ℓ_n rovnicemi $\ell_n = \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu$, $\left(\begin{matrix}\mu+\nu = n \\ \mu,\nu = 1,2,\dots q-1\end{matrix}\right)$, dle nichž

$$(2)\quad \ell_n = \sum_{\mu=1}^{n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{n-\mu} \quad \text{pro } n \leqq q, \quad \sout{\ell_{q+n} = \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_{q-\mu} \varepsilon_{n+\mu}}$$

~~Pak bude~~

$$\ell_{q+n} = \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_{q-\mu} \varepsilon_{n+\mu} = - \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{n+\mu},$$

$$\sum_{1}^{q} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+n} = -1 \quad n \not\equiv 0$$

$$(3)\quad Q^2(x) = \sum_{1}^{2q-2} \ell_n x^n,$$

takže identicky

$$\ell_{q+n} = \ell_{q-n}.$$

a tento výraz možno psáti

$$Q^2(x) = \sum_{n=1}^{q-1} \ell_n x^n + \sum_{n=0}^{q-2} \ell_{q+n} x^n + (x^q - 1) \sum_{n=0}^{q-2} \ell_{q+n} x^n,$$

z čehož přičtením q na obou stranách vychází

$$Q^2 + q = \left[\ell_{q-1} x^{q-1} + (\ell_q + q) + \sum_{n=1}^{q-2} (\ell_n + \ell_{q+n}) x^n\right] + (x^q - 1) \sum_{n=0}^{q-2} \ell_{q+n} x^n.$$

Poslední člen vpravo a levá strana obsahují činitele $\frac{x^q - 1}{x-1}$, a musí jím býti dělitelen také součet uzávorkovaný; poněvadž jest stupně $q-1$, bude podíl konstantou a sice ~~součinitel~~ právě součinitel při x^{q-1}

$$\ell_{q-1}.$$

$$\ell_n = \sum_{1}^{n-1} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{n-\alpha}, \quad \ell_{n+1} - \ell_n = \sum_{1}^{n-1} \varepsilon_\alpha (\varepsilon_{n+1-\alpha} - \varepsilon_{n-\alpha}) + \varepsilon_n$$

$$\ell_{n+1} - \ell_n \equiv \varepsilon_n + \sum_{1}^{n-1} (\varepsilon_{n+1-\alpha} - \varepsilon_{n-\alpha}) = \varepsilon_n + (\varepsilon_n - \varepsilon_1) = 2\varepsilon_n - 1$$

$$\equiv 1 \pmod{4}; \quad \ell_{n+k} \equiv \ell_n + k \pmod{4} \quad \ell_n \equiv n-1$$

Bude tedy

$$e_{q-1}x^{q-1}+(e_q+q)+\sum_{n=1}^{q-2}(e_n+e_{q+n})x^n = e_{q-1}\frac{x^q-1}{x-1}.$$

Porovnáním stálých členů plyne

$$e_q+q = e_{q-1},$$

a poněvadž (2)

$$e_q = \sum_1^{q-1}\varepsilon_\mu\varepsilon_{q-\mu} = -\sum_1^{q-1}\varepsilon_\mu^2 = -(q-1),$$

tedy

$$e_q+q=1,$$

máme $e_{q-1}=1$, a tedy identitu

(4) $$x^{q-1}+1+\sum_{n=1}^{q-2}(e_n+e_{q+n})x^n = \frac{x^q-1}{x-1},$$

která nahrazuje vztahy

(4') $e_n+e_{q+n}=1, \quad e_{q-1}=1, \quad e_q = 1-q.$

Tím nabývá náš výsledek tvaru

$$Q^2+q = \frac{x^q-1}{x-1}+(x^q-1)\sum_{n=0}^{q-2}e_{q+n}x^n;$$

a nahradíme-li zde e_{q+n} hodnotou $1-e_n$ dle (4'),

DSI

DSI

obdrží druhá část pravé strany tvar

$$(x^q-1)\left[1-q+\sum_{n=1}^{q-1} x^n - \sum_{n=1}^{q-1} e_n x^n\right],$$

kde připojené členy x^{q-1} a $-e_{q-1}x^{q-1}$ se navzájem ruší.

Tento výraz je pak

$$(x^q-1)\left[\frac{x^q-1}{x-1} - q - \sum_{n=1}^{q-1} e_n x^n\right]$$

a tak náš výsledek lze psáti

$$Q^2+q = \frac{x^q-1}{x-1} + \frac{(x^q-1)^2}{x-1} - q(x^q-1) - (x^q-1)\sum_{1}^{q-1} e_n x^n$$

čili

$$(I)\quad Q^2(x) = \frac{x^q-1}{x-1} + \frac{(x^q-1)^2}{x-1} - q x^q + (1-x^q)\sum_{n=1}^{q-1} e_n x^n.$$

Důležité vztahy (4')

$$e_{q+n} = 1 - e_n = e_{q-n}$$

lze v důsledku definice

$$e_{q+n} = \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_{q-\mu}\,\varepsilon_{n+\mu} = -\sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_{\mu}\,\varepsilon_{n+\mu}$$

a ~~vztahu~~ rovnice

Počet trojin (+ − +)

$$8N' = (q-3) + 2(1+\varepsilon_2)$$

$$N' = \frac{q-3+2(1+\varepsilon_2)}{8}$$

$q = 23$; + + + + − + − + + − − + + − − + − + ...

(1, 2, 3)

Trojiny − + − jsou ve stejném počtu N'

Trojiny (+ + −) (N''); $8N'' = (q-3) + 2(1+\varepsilon_2)$; $N'' = N'$

Trojiny + − − ve stejném počtu $N' = N''$

Trojiny − + + ; $(q-3) - 2(1+\varepsilon_2) = 8N$

" − − +

V úplné řadě Legendr. znamének $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1}$ přichází

$\frac{q-3-2(1+\varepsilon_2)}{8}$ trojin každého z typů + + +, − + +, − − −, − − +

a $\frac{q-3+2(1+\varepsilon_2)}{8}$ trojin typů + − +, − + −, + + −, + − −

(a) Str. 5.

Substitucí $s-\nu$ za ν plyne $(q=4k+3)$

$$\sum_{1}^{q-1} \varepsilon_{\nu-1}\varepsilon_\nu = 0,$$

tedy

$$(*)\quad \sum_{1}^{q-3} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1} \varepsilon_{\nu+2} = 0$$

Spojíme-li s vlastnostmi $\sum_{1}^{q-2} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1} = -1$, $\sum_{1}^{q-3} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+2} = 0$,

máme pro počet trojin $(+++)$ kladných

$$N = \sum_{1}^{q-3} \frac{1+\varepsilon_\nu}{2}\,\frac{1+\varepsilon_{\nu+1}}{2}\,\frac{1+\varepsilon_{\nu+2}}{2}$$

vztah

$$8N = (q-3) + \sum_{1}^{q-3}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2}) + \sum_{1}^{q-3}(\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu+2} + \varepsilon_{\nu+1}\varepsilon_{\nu+2})$$

$$+ \sum_{1}^{q-3} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1} \varepsilon_{\nu+2}$$

$$= (q-3) + (0 - \varepsilon_{q-2} - \varepsilon_{q-1}) + (0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_{q-1}) + (0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$+\left(\sum_{1}^{q-2} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1}\right.$ [illegible] $\left. - \varepsilon_{q-2}\varepsilon_{q-1}\right) + \left(\sum_{1}^{q-2} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1} - \varepsilon_1 \varepsilon_2\right)$

$$+ \sum_{1}^{q-3} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+2}$$

t. j.

$$8N = (q-3) - 2 - 2\varepsilon_2$$

$$(*)\quad N = \frac{q-3-2(1+\varepsilon_2)}{8}$$

počet kladných trojin

Počet záporných trojin je stejně veliký

platí

$$(4^*)\quad \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{n+\mu} = -1 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{n-\mu}$$

~~Levá strana — e_{q-n}, pravá $1 + e_n$ má dle~~

~~Poznamenejme ještě, že~~

~~$$e_{q-n} \sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{q-n-\mu} = -\sum_{\mu=1}^{q-n-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{n+\mu}$$~~

~~má dle poslední rovnice hodnotu $1 - e_n$, a tedy~~

~~$$(4^2)\quad e_{q-n} = 1 - e_n = e_{q+n}$$~~

Pro zvláštní případy $n = 1, 2, 3, 4$ podává rovnice (4*) vztahy

$$(4^2)\left\{\begin{array}{l} \sum_1^{q-2} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1} = -1, \quad \sum_1^{q-3} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+2} = 0, \\ \sum_1^{q-4} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+3} = 2\varepsilon_2 - 1, \quad \sum_1^{q-5} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+4} = 2\varepsilon_3, \end{array}\right.$$

z nichž první se takto interpretuje: Pro kmenné moduly q tvaru $4a+3$ obsahuje plná řada Legendreových znamének

$$(\mathfrak{L})\quad \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{q-1}, \quad q = 4a+3 \text{ kmenné},$$

o jednu změnu více než sledů.

Je tedy v ní $\frac{q-3}{2}$ sledů a $\frac{q-1}{2}$ změn.

Případy, kdy ~~se~~ dvě sousední znaménka jsou kladná, jsou dány počtem

$$\sum_{1}^{q-2} \frac{(1+\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1})}{4} = \frac{q-2}{4} + \sum_{\nu=1}^{q-2} \frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{q-3}{4} - \frac{\varepsilon_{q-1} + \varepsilon_1}{4} = \frac{q-3}{4},$$

tolikéž obnáší počet párů záporných.

„V řadě ($\mathfrak{L}$) jest $\frac{q-3}{4}$ párů sousedních členů kladných a tolikéž párů sousedních členů záporných."

Sousední znaménka $-+$ tvoří vzestup, opačný pořad $+-$ pokles.

Počet ~~párů~~ vzestupů obnáší

$$\sum_{1}^{q-2} \frac{(1-\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1})}{4} = \frac{q-1}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{q-2} \varepsilon_{\nu+1} - \sum_{1}^{q-2} \varepsilon_\nu\right);$$

závorka $= -\varepsilon_1 + \varepsilon_{q-1} = -2$, tedy

DSI

řada (L) obsahuje $\frac{q-3}{4}$ vzestupů a ~~tolikéž~~ $\frac{q+1}{4}$ poklesů.

Znamenejme

$$\frac{q-1}{2} = m,$$

a proveďme rozklad

$$-1 = \sum_{1}^{q-2} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1} = \sum_{1}^{m-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1} + \sum_{m}^{q-2} \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1};$$

v druhé části pišme $\nu = q - \mu - 1$, $\mu = 1, 2, \dots m$,

čímž vyjde

$$-1 = \sum_{1}^{m-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1} + \sum_{1}^{m} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1};$$

v druhé části má poslední člen $\varepsilon_m \varepsilon_{m+1}$ hodnotu

$$\varepsilon_2 \varepsilon_m \cdot \varepsilon_2 \varepsilon_{m+1} = \left(\frac{q-1}{q}\right)\left(\frac{q+1}{q}\right) = -1,$$

a tedy vyjde

(5) $$\sum_{\mu=1}^{m-1} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+1} = 0, \quad m = \frac{q-1}{2}.$$

» V polovičné řadě Legendreových znamének

(M) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$, $m = \frac{q-1}{2}$, $q = 4a+3$ kmenné,

je právě tolik sledů co změn.

Pro počet vzestupů $-+$ máme výraz

$$\sum_1^{m-1} \frac{(1-\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1})}{4} = \frac{m-1}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_1^{m-1}\varepsilon_{\nu+1} - \sum_1^{m-1}\varepsilon_\nu\right);$$

závorka má hodnotu $-1+\varepsilon_m$; obecně

$$\varepsilon_{m+\mu} = \varepsilon_2\,\varepsilon_{2m+2\mu} = \varepsilon_2\,\varepsilon_{2\mu-1},$$

tedy

$$\varepsilon_m = -\varepsilon_2,$$

tedy počet vzestupů jest

$$\frac{m-1}{4} - \frac{1+\varepsilon_2}{4}.$$

Pro $q = 8a+3$ jest $\varepsilon_2 = -1$, $\frac{m-1}{4} = a$, udaný počet tedy $a = \left[\frac{q}{8}\right]$.

Pro $q = 8a+7$ jest $\varepsilon_2 = 1$, $\frac{m-1}{4} - \frac{1+\varepsilon_2}{4} = a$, počet vzestupů tedy opět $\left[\frac{q}{8}\right]$.

Počet poklesů

$$\frac{m-1}{4} + \frac{1+\varepsilon_2}{4} = \frac{m+\varepsilon_2}{4}$$

se vyjadřuje symbolem $\left[\frac{q+3}{8}\right]$. Tedy

DSI

„Řada (M) obsahuje $\left[\frac{q}{8}\right]$ vzestupů a $\left[\frac{q+3}{8}\right]$ poklesů.

Ve vyjádření počtu párů sousedních členů řady (M) se vyskytne číslo

$$\sum_{1}^{m} \varepsilon_\nu = h = (2-\varepsilon_2)\, Cl(-q)\ ,$$

kde $\underline{h}$ značí počet tříd podstatně primitivních kladných kvadratických forem

$$a x^2 + 2bxy + c y^2$$

determinanty $b^2 - ac = -q$, kdežto $Cl(-q)$ udává počet těchto forem polouprimitivních (nevlastně prim.), čili počet forem

$$a' x^2 + b' xy + c' y^2$$

diskriminantu $-q = b'^2 - 4a'c'$.

Počet kladných párů je totiž

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{(1+\varepsilon_\mu)(1+\varepsilon_{\mu+1})}{4} = \frac{m-1}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{m-1}\varepsilon_\mu + \sum_{1}^{m-1}\varepsilon_{\mu+1}\right)$$

$$= \frac{m-1}{4} + \frac{2h - \varepsilon_1 - \varepsilon_m}{4}$$

DSI

čili

$$\frac{q-3}{8} + \frac{1}{2}\left(h - \frac{1-\varepsilon_2}{2}\right),$$

kdežto počet ~~...ů~~ záporných párů je udán rozdílem napsaných členů. Pro $\varepsilon_2 = -1$ jest $h \geq 3$, tedy závorka ve všech případech číslo kladné:

„V řadě (M) je počet kladných párů sousedních členů větší než počet párů záporných; rozdíl obnáší

$$h - \frac{1-\varepsilon_2}{2},$$

číslo liché pro $q = 8a+7$, sudé pro $q = 8a+3$.

Příklady:

$q=11$; $\varepsilon = + - + + +$; $2 - 0 = h - 1$

$q=23$; $\varepsilon = + + + + - + - + + - -$; $4 - 1 = h$

Druhá z rovnic (4^3)

$$\sum_{1}^{q-3} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu+2} = 0$$

vyjadřuje, že

v řadě (L) právě tolik znamének odděluje od sebe dvě znamení stejná jako dvě znamení opačná.

DSI

Případy, kdy dvě znamení kladná $\varepsilon_\mu\ \varepsilon_{\mu+2}$ jsou oddělena znamením ε_μ, jsou v počtu

$$\sum_1^{q-3} \frac{(1+\varepsilon_\mu)(1+\varepsilon_{\mu+2})}{4} = \frac{q-3}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_1^{q-3}\varepsilon_\mu + \sum_1^{q-3}\varepsilon_{\mu+2}\right)$$

$$= \frac{q-3}{4} + \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{q-2} + \varepsilon_{q-1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) = \frac{q-3}{4}.$$

„V řadě (L) přihodí se $\frac{q-3}{4}$ kráte, že jeden člen leží mezi dvěma kladnýma; tolikéž členů leží mezi dvěma zápornýma.

Rovnici poslední můžeme psáti

$$0 = \sum_{\mu=1}^{m-2} \varepsilon_\mu\ \varepsilon_{\mu+2} + \sum_{\nu=m-1}^{q-3} \varepsilon_\nu\ \varepsilon_{\nu+2} \quad ;$$

v druhé části položme $\nu = q-\mu-2$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots m$, načež vyjde

$$2\sum_{\mu=1}^{m-2} \varepsilon_\mu\ \varepsilon_{\mu+2} + \varepsilon_{m-1}\ \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_m\ \varepsilon_{m+2} = 0.$$

Avšak

$$\varepsilon_{m-1}\ \varepsilon_{m+1} = -\varepsilon_3 = \varepsilon_m\ \varepsilon_{m+2}\ ,$$

tedy (6) $\sum_1^{m-2} \varepsilon_\mu\ \varepsilon_{\mu+2} = \varepsilon_3$

DSI

» Řada

$$\varepsilon_3 \ \varepsilon_5 \ \dots \ \varepsilon_{m-2}$$

obsahuje tolik změn co má řada

$$\varepsilon_2 \ \varepsilon_4 \dots \ \varepsilon_{m-3}$$

sledů.

Na př. pro $q = 23$ jsou tyto řady

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad - \quad *$$

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad -$$

Počet členů řady (M) sevřených dvěma členy kladnýma obnáší

$$\sum_{1}^{m-2} \frac{(1+\varepsilon_\mu)(1+\varepsilon_{\mu+2})}{4} = \frac{m-2}{4} + \frac{\varepsilon_3}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_1^{m-2}\varepsilon_\mu + \sum_1^{m-2}\varepsilon_{\mu+2}\right)$$

Závorka má hodnotu $2h - \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2h - (1-\varepsilon_6)$

~~2h − [illegible]~~

a uvažované číslo je

$$\frac{m-3}{4} + \frac{\varepsilon_3+\varepsilon_6}{4} + \frac{h}{2} \ ;$$

členy uzavřené dvěma členy zápornýma jsou v počtu

DSI

DSI

$$\frac{m-1}{4} + \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_6}{4} = \frac{h}{2}.$$

Převaha členů řady (M) ležících mezi dvěma členy kladnýma nad členy téže řady ležícími mezi dvěma členy zápornýma obnáší

$$h - \frac{1-\varepsilon_6}{2}.$$

Př. $q = 23$; kladnými sousedy obklopené členy jsou $\nu = 2, 3, 5, 7$, zápornými členy jest obklopen člen $\nu = 6$;

$$4 - 1 = 3 = h, \quad \frac{1-\varepsilon_6}{2} = 0$$

Trojčleny s jedinou variací jsou buď vzestupné $- \pm +$, aneb sestupné $+ \pm -$.

Počet vzestupných

$$\sum_{1}^{m-2} \frac{(1-\varepsilon_\mu)(1+\varepsilon_{\mu+2})}{4} = \frac{m-2}{4} - \frac{\varepsilon_3}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{m-2} \varepsilon_{\mu+2} - \sum_{1}^{m-2} \varepsilon_\mu\right)$$

$$= \frac{m-2}{4} - \frac{\varepsilon_3}{4} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m\right)$$

obnáší

~~$\frac{m-3}{4} - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} = \frac{q-7}{8} - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}$~~

$$\frac{m-2}{4} - \frac{1}{4}\left(1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6\right) = \frac{m-2-\varepsilon_2}{4} - \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{4}$$

čili

$$\frac{q-5-2\varepsilon_2}{8} - \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{4} = \left[\frac{q}{8}\right] - \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{4},$$

kdežto počet trojin sestupných jest

$$\frac{m-2-\varepsilon_2}{4} + \varepsilon_2 + \frac{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}{4} = \left[\frac{q}{8}\right] + \varepsilon_2 + \frac{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}{4}$$

Mezi trojinami sousedních znamének z řady (M) ~~jed~~ s jedinou variací jest jich

$$\left[\frac{q}{8}\right] - \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{4} \quad \text{vzestupných},$$

a

$$\left[\frac{q}{8}\right] + \varepsilon_2 + \frac{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}{4} \quad \text{sestupných. a}$$

Převaha sestupných nad vzestupnými obnáší $\varepsilon_2 + \frac{1+\varepsilon_6}{2}$.

Pro $q = 11$ jsou tyto počty resp. 1, $1-1=0$

$q = 23$ " " " " " $2-1=1$, $2+1=3$

DSI

ce qui est bien une fonction paire. En détermi-nant la constante par l'hypothèse de $u=0$, on trouve

$$\phi(u) = Z(x-a+u) + Z(x-a-u) - 2Z(x-a) + \frac{f'(a)+f'(x)}{f(x)-f(a)}$$

ou en d'autres termes:

$$\frac{f'(a)}{f(x+\xi)-f(a)} - \frac{f'(x)}{f(a+\xi)-f(x)} + \frac{f'(a)+f'(x)}{f(a)-f(x)}$$

$$= Z(x-a+\xi) + Z(x-a-\xi) - 2Z(x-a)$$

Je serais heureux, Monsieur, si vous admetterez que votre formule ingénieuse orne mon traité des fonctions elliptiques dont je vais reprendre la ré-daction définitive. En me réservant de vous écrire prochainement sur une très simple démonstration des propriétés de K et K', je vous prie, Monsieur, de bien vouloir agréer l'expression ...

Monsieur,

J'ai eu plusieurs fois idée de vous écrire, mais étant occupé du travail bibliographique pour la grande bibliographie universelle des sciences mathématiques et puis, ne connaissant pas suffisamment le français pour bien exprimer les pensées qui concernent la politique, je n'y suis pas parvenu avant les vacances. Je ne vous écrirai pas, Monsieur, de notre situation politique qui est presque imaginaire: Les députés d'un peuple tout libéral doivent chercher l'alliance avec le radicalisme cléri-cal et avec les gentils-hommes de la Pologne dont l'égoïsme social est maintenant bien con-nu. On dit chez nous qu'on aime un Allemand trente fois plus qu'un Polonnais.

DSI

Permettez moi de remarque que jamais Mr le Cte Taaffe n'était ami de notre nation, sa mission n'était que de tromper les vieux-Tchèque, ce qui était d'ailleurs facile. J'ai difficulté de croire que l'opinion sur le feu parti des vieux-Tchèques, qu'on a lu dans le Journal des Débats dont vous aviez bien voulu me donner deux numéros, soit de l'origine français.

Mr Taaffe a d'ailleurs rompu la force de tous les autres partis de Reichsrath, on le voit sur la Gauche, ce tigre d'autrefois qui maintenant obéit comme un chien. Le but de Mr Taaffe n'étant que de diminuer les droits constitutionnels à prophit de l'absolutisme et de faire une „commédie pour les enfants" du parlament, on voit que ce politicien a su trouver des voies rapides pour y parvenir.

Mais laissant ce domaine qui m'est entièrement étranger, j'ose vous soumettre une modeste remarque sur votre formule de l'extrême élégance

$$\frac{f'(a)}{f'(x+\xi)-f(a)} - \frac{f'(a)}{f(x-\xi)-f(a)} = \frac{f'(x)}{f(a+\xi)-f(x)} - \frac{f'(x)}{f(a-\xi)-f(x)}$$

qui se trouve dans la dernière lettre dont vous avez bien voulu de me honorer.

Vous y êtes parvenu sans doute par la décomposition en éléments simples et après que vous l'avez inventées il sera facile de la vérifier pour chaque fonction elliptique du 2me degré. Il suffit de remarquer que les pôles des deux membres sont les mêmes points

$$x = a \pm \xi \;,\quad c - a \mp \xi$$

avec les mêmes résidus correspondants $\mp 1, \mp 1$ et qu'ils coïncident pour $x = a$.

On peut énoncer votre résultat sous cette forme que la quantité

$$\Phi(u) = \frac{f'(a)}{f(x+u)-f(a)} - \frac{f'(x)}{f(a+u)-f(x)}$$

est une fonction paire de u.

Ses infinis sont en effet $u = a - x$ et $u = -a + x$, avec les résidus correspondants 1 et -1, ce qui donne, en designant par $Z u$ la dérivée logarithmique de la fonction $H(u)$,

$$\Phi(u) = Z(u+x-a) - Z(u-x+a) + \text{const}$$

ou bien

$$\Phi(u) = Z(x-a+u) + Z(x-a-u) + \text{const},$$

O jedné úloze elektrostatické

Napsal M. Lerch

[illegible] analytický [illegible] podáváme [illegible]

[illegible] buď [illegible] spojitá. [illegible] její směrů [illegible] na normále [illegible] na straně [illegible] obecné [illegible]

$$\int E \frac{\cos(r,n)}{r^2}\, dS\,,$$

[illegible] značí délku [illegible] s normálou [illegible]

ARMIN WEINER

O jedné větě elektrostatické.

Napsal M. Lerch.

Účelem těchto řádků jest podati přesný důkaz analytický následující věty z theorie potenciálu, kterou zde podáváme nejprvé ve znění čistě mathematickém:

Buď dána analytická plocha S, konečná, a na ní buď definována jednoznačná funkce místa E, konečná a spojitá. V určitém bodě P_0 plochy S vedme normálu a jeden z obou jejích směrů n buď označen jako kladný. V malé vzdálenosti δ od bodu P_0 na normále na straně kladné a záporné buďtež body P_δ resp. $P_{-\delta}$. Značíli pak obecně $\Phi(P)$ hodnotu integrálu

$$\int E \frac{\cos(r,n)}{r^2} d\sigma ,$$

v němž $d\sigma$ probíhá všecky prvky plochy S, r pak značí délku průvodiče vedeného od bodu P k prvku $d\sigma$, (r,n) úhel tohoto s normálou n, bude

$$\begin{cases} \lim\limits_{\delta=0} \Phi(P_\delta) = \Phi(P_0) + 2\pi E_0 , \\ \lim\limits_{\delta=0} \Phi(P_{-\delta}) = \Phi(P_0) - 2\pi E_0 , \end{cases}$$

kde E_0 jest hodnota funkce E v bodě P_0.

Při tom podotýkáme výslovně, že plocha S nemusí býti uzavřena.

Na ploše S kol bodu P_0 opišme malou uzavřenou čáru (σ), kterou se vymezí malá část σ plochy S; vzdálenost δ bodů P_δ a $P_{-\delta}$ od bodu P_0 volme tak malou, aby mizela v porovnání se vzdálenostmi bodů čáry (σ) od bodu P_0. Zařiďme pravoúhlou soustava souřadnic tak, aby bod P_0 byl její počátkem a ~~[illegible]~~ normála n byla osou X, i co do směru, takže rovina YZ se plochy dotýká v bodě P_0.

Z té příčiny mizí výrazy $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$ v bodě P_0 a bude tedy existovati rozvoj

$$(1) \qquad x = ay^2 + 2byz + cz^2 + \cdots ,$$

který nám na ploše σ vyjadřuje či nahražuje rovnici plochy S. Jelikož pak

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz ,$$

a pro body $P_0, P_\delta, P_{-\delta}$ máme $\cos(r, n) = \frac{x}{r}, \frac{\delta+x}{r}, \frac{-\delta+x}{r}$,

obdržíme tak

$$\Phi(P_0) = \iint\limits_S E \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; \frac{x\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$\Phi(P_\delta) = \iint\limits_S E \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; \frac{(x+\delta)\, dy\, dz}{\left[(x+\delta)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$\Phi(P_{-\delta}) = \iint\limits_S E \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; \frac{(x-\delta)\, dy\, dz}{\left[(x-\delta)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} .$$

Že poslední dva integrály existují, jest na bíledni; v prvním však stane se integrovaná funkce na místě P_0 nekonečnou a tedy třeba (ještě) dokázati, že existuje integrál vzatý po ploše σ:

$$J(P_0) = \iint\limits_\sigma E \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\; \frac{x\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

tím bude též dokázáno, že tento mizí zároveň s plochou σ.

K tomu třeba uvážiti, že funkce

$$E \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = G$$

je konečnou a spojitou na σ, a že po zavedení polarných souřadnic ρ, ω substitucemi

$y = \varrho\cos\omega$, $z = \varrho\sin\omega$,

integrál $J(P_0)$ obdrží tvar

$$\iint_\sigma G_1 \frac{x}{\varrho^2} \frac{d\varrho\, d\omega}{\left(1+\frac{x^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

kde dle supposice (1) jest $\frac{x}{\varrho^2}$ konečno na σ; integrál tento ale patrně existuje.

Integrály $\Phi(P)$ rozložme ve dva $\Phi(P,\sigma) + J(P)$, kde první $\Phi(P,\sigma)$ vztahuje se k ploše $S-\sigma$, která vznikla vyloučením plošky σ z S, a druhý $J(P)$ vztahuje se k ploše σ, takže

$$J(P_{\pm\delta}) = \iint_\sigma E\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\frac{(x\pm\delta)\,dy\,dz}{[(x\pm\delta)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrál $\Phi(P,\sigma)$ neobsahuje prvků pochodících ze σ a tedy mění se spojitě, probíhá-li P normálu n od P_δ do $P_{-\delta}$. Zbývá tedy pouze vyšetřiti veličiny $\lim_{\delta=0} J(P_{\pm\delta})$.

Podržíme-li uvedený význam litery G_1, máme

$$J(P_{\pm\delta}) = \iint_\sigma G_1 \frac{\pm\delta\,dy\,dz}{[(x\pm\delta)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} + \iint_\sigma G_1 \frac{x\,dy\,dz}{[(x\pm\delta)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

DSI

Značíli G_1' největší prostý obnos veličiny G_1 na plošce σ, bude poslední integrál menší než

$$G'\iint_\sigma \frac{|x|\,dy\,dz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = G'\iint_\sigma \left|\frac{x}{\varrho^2}\right| d\varrho\, d\omega,$$

kde polarné souřadnice ϱ, ω mají význam výše vyložený. Poslední integrál je však vůči supposici (1) konečným a tedy mizí se σ.

Zbývá pouze studovati limity výrazů

$$\bar{J}(P_{\pm\delta}) = \iint_\sigma G_1 \frac{\pm\delta\,dy\,dz}{[(x\pm\delta)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}};$$

jelikož na σ se G_1 velmi málo liší od hodnoty G v bodě P_0, která jest E_0, máme dle věty o střední hodnotě:

$$\bar{J}(P_{\pm\delta}) = (E_0+\varepsilon)\iint_\sigma \frac{\pm\delta\,dy\,dz}{[(x\pm\delta)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

kde ε mizí zároveň se σ. Substitucí polarných souřadnic ϱ, ω obdržíme odtud

$$\bar{J}(P_{\pm\delta}) = (E_0+\varepsilon)\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\varrho_1} \frac{\pm\delta\,\varrho\,d\varrho}{(\delta^2+\lambda\varrho^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde položeno

$$\mathcal{N} = 1 \pm 2\delta \left(a \cos^2\alpha + 2b \cos\alpha \sin\alpha + c \sin^2\alpha + \cdots\right),$$

při čemž vynechané členy obsahují činitele $\varrho, \varrho^2, \cdots$ a mohou tedy při prvním sblížení býti vynechány. Učiníme-li tak, bude

$\mathcal{N}$ nezávislým na ϱ a my obdržíme

$$\bar{J}(P_{\pm\delta}) = \int_{\delta_1}^{\sigma} \pm(E_0 + \varepsilon) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\mathcal{N}} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \mathcal{N}\varrho_1^2}}\right);$$

avšak

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{2\pi} \frac{\delta\, d\alpha}{\mathcal{N}\sqrt{\delta^2 + \mathcal{N}\varrho_1^2}} = \sigma, \quad \lim_{\delta=0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\mathcal{N}} = 2\pi$$

a tedy

$$\lim_{\delta=0} \bar{J}(P_{\pm\delta}) = \pm 2\pi(E_0 + \varepsilon'),$$

kde ε' je nekonečně malé zároveň se σ; dlužno též připustiti možnost, že limita levé strany neexistuje, pak ale nicméně výraz $\bar{J}(P_{\pm\delta})$ oscilluje v mezích $\pm 2\pi(E_0 - \varepsilon_0)$, $\pm 2\pi(E_0 + \varepsilon_0)$, kde ε_0 je velmi malé zároveň se σ, probíhá-li δ malé hodnoty. Tu stačí pak považovati ε' za veličinu oscillační, aby vzorec byl správným i pro tento případ.

~~Napak~~

Nalezli jsme takto výsledek

$$J(P_{\pm\delta}) = \pm 2\pi E_0 + \varepsilon'',$$

kde veličina ε'' jest velmi malou zároveň s δ a σ. Jelikož pak rozdíl veličin

$$\Phi(P_{\pm\delta}, \sigma) - \Phi(P_0, \sigma)$$

a tedy též rozdíl $\Phi(P_{\pm\delta}, \sigma) - \Phi(P_0)$

~~a tedy též~~ jest velmi malý, jeli δ i vůči rozměrům čáry (σ) nepatrné, nacházíme, že rozdíl

$$\Phi(P_{\pm\delta}) \mp 2\pi E_0 - \Phi(P_0)$$

$$= \left[\Phi(P_{\pm\delta}, \sigma) - \Phi(P_0)\right] + \varepsilon''$$

jest velmi malý jeli σ dosti malé a tím více δ. Veličina

$$\Phi(P_{\pm\delta}) - \Phi(P_0) \mp 2\pi E_0$$

~~nebo tedy buď určitou malou veličinou~~

však nezávisí na σ a tedy bude velmi malou zároveň s δ, t. j. bude

$$\lim_{\delta=0} \left\{\Phi(P_{\pm\delta}) - \Phi(P_0) \mp 2\pi E_0\right\} = 0,$$

čímž naše tvrzení dokázáno.

2. Jedná se nyní o zobecnění dokázané věty pro případ, že n značí sečnu s plochy S různou od normaly (sečnu jež protne plochu v bodě P_0!), tak bude, volíme-li opět osu X ve směru s, platiti rozvoj

$$(2) \qquad x = \alpha y + \beta z + a y^2 + 2b yz + c z^2 + \cdots ,$$

a nám bude vyšetřovati integrály tvaru

$$J = \iint_{\sigma} G \frac{(x+\lambda)\, dy\, dz}{\left[(x+\lambda)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

kde λ značí $\pm \delta$ neb 0, a G jako dříve ~~[illegible]~~

$$G = E \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}.$$

Tu pak podobně jako předešle můžeme zanedbati integrály

$$\iint_{\sigma} G \frac{(a y^2 + 2b yz + c z^2 + \cdots)\, dy\, dz}{\left[(x+\lambda)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

a stačí uvažovati výrazy

$$\overline{J}_{\lambda} = \iint_{\sigma} G \frac{(\lambda + \alpha y + \beta z)\, dy\, dz}{\left[(x+\lambda)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

~~[illegible]~~ Tu především dlužno dokázati existenci integrálu $\overline{J}_0$; za tím účelem veďme kol P_0 uvnitř σ malou uzavřenou čáru (σ_0), takže pak křivky $(\sigma_0)(\sigma)$ omezují věnec σ', v němž neleží bod P_0, a uvažujme integrál

$$J_0^{\sigma'} = \iint_{\sigma'} G \frac{(\alpha y + \beta z)\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

zaveďme k jeho stanovení polarné souřadnice ϱ, ω rovnicemi

$$y = \varrho \cos\omega, \quad z = \varrho \sin\omega,$$

a položme

$$x = \varrho(\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega + a\varrho \cos^2\omega + 2b\varrho \cos\omega \sin\omega + \cdots)$$
$$= \varrho A,$$

i obdržíme

$$J_0^{\sigma'} = \iint_{\sigma'} G \frac{(\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega)\, d\varrho\, d\omega}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}} \varrho}.$$

~~Provedme nejdříve integraci vůči ϱ, obdržíme~~

~~$$J_0^{\sigma'} = \int_0^{2\pi} \Phi(\omega)(\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega)\, d\omega =$$~~

DSI

Tu pak bude

$$G\,(1+A^2)^{-\frac{3}{2}} = G_0\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{-\frac{3}{2}} + (\varrho),$$

kde (ϱ) znamená řadu obsahující členy s mocninami $\varrho, \varrho^2, \varrho^3 \dots$ ~~a tedy~~ a $G_0 = E_0\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$; tudíž

$$J_0^{\sigma'} = \iint_{\sigma'} G_0 \frac{(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)\,d\varrho\,d\omega}{\varrho\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\iint_{\sigma'} (\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)\frac{(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho\,d\omega\,;$$

poslední integrál je patrně konečný, přejde-li σ' v σ, a proto stačí vyšetřovati integrál

$$J_0' = \iint_{\sigma'} G_0 \frac{(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)}{\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\varrho\,d\omega}{\varrho}$$

Proveďme nejdříve integraci vůči ϱ, i obdržíme

$$J_0' = G_0 \int_0^{2\pi} \log\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\,\frac{\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega}{\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,d\omega,$$

kde ϱ_0, ϱ_1 značí hodnoty ϱ příslušné ku ω na čarách (σ_0), (σ), omezujících obor σ'.

Volíme-li čáry (σ), (σ_0) tak, aby [illegible] ~~na poměru [illegible]~~

Budiž r_0 nejmenší hodnota ϱ_0, ~~největší hodnota ϱ_1~~; i bude pak $\frac{\varrho_0}{r_0} = \varphi_0(\omega)$, [illegible] periodické funkce stále kladná a větší než 1, takže obdržíme

$$J_0' = G_0 \int_0^{2\pi} \log\frac{\varrho_1}{\varphi_0(\omega)}\,\frac{\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega}{\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,d\omega$$

$$- G_0\log r_0 \int_0^{2\pi} \frac{\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega}{\left[1+(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,d\omega\,;$$

poslední integrál se rovná nulle a proto zůstává konečným, ~~jestli [illegible]~~ zmenšuje-li se σ_0 tak, aby $\varphi_0(\omega)$ zůstávala konečnou.

Tu pak lze funkci $\log \frac{\xi_i}{\xi_0}$ uvésti na tvar $C + \Phi(\omega)$, kde $\Phi(\omega)$ jest libovolná periodická funkce konečná a C vhodně volená konstanta; integrál J_0' neblíží se tedy žádné určité mezi, zužují-li se σ_0 a proto nelze mluviti o integrálu J_0.

Z toho plyne, že elektřina musí býti rozložena ve vrstvě tloušťky konečné.

Tu pak lze funkci $\log^{x}_{\delta}$ uvésti na tvar $C + \Phi(\omega)$, kde $\Phi(\omega)$ jest libovolná pravidelná funkce konečná a C libovolně volená konstanta; integrál J_0' neblíží se tedy žádné určité mezi, blíží-li se δ_0 a proto nelze mluviti o integrálu J_0.

Z toho plyne, že složitina musí býti rozložena [illegible] složky konečné.

L E R C H, Matyai - Czech Mathematician

B. February 20, 1860. Milinow, Bohemia
D. August 3, 1922. Schnettenhofer, Bohemia

His pioneer work in the theory of numbers was crowned, in 1900, with the highest price (Grand Prix) of the French Academy. His 200 noteworthy papers on indefinite and special series, on special functions and integrals bear the stamp of his famous teachers Weierstrass, Kronecker and Hermite.

1. A.M.S. 11½ p. 4to (Czech) Scientific Paper with the title
"O JEDNE VETE ELECTROSTATICKE"
(on an electrostic theorem)
dealing with certain developments concerning the theory of the potential.

2. A.M.S. 14 p. 4to (Czech) Scientific paper with the title
"UVAHY O THEORII KUADRATICKYCH ZBYTKU PRO KMENNE MODULY".
(Considerations on the theory of quadratic rests for odd modulus)

3. A.L.S. 4 p. 8vo, no date, no place (French) addressed, most probably to the famous French Mathematician HERMITE, his teacher and friend. He first explains the political situation in Austria as far as the Czechs are concerned. In the scientific part of the letter Lerch developes an extension of an important formula found by Hermite and asks for the permission to quote this elegant formula in his own work on elliptical functions he is just nowpreparing for publication.

WEINER.